Funkce více proměnných – úvod

1) Zákl. příklady:

- objem kvádru o stranách délek x, y, z

$$V(x,y,z) = x \cdot y \cdot z \qquad \text{(3 nezávislé prom.)}$$

- teplota v daném bodě prostoru

$$T(x,y,z) = \dots$$

- křivka v $\mathbb{R}^2$: trajektorie dělové koule / částice v silovém poli

$$\varphi(t) = (t, 100 - t^2)$$

$$\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{t}} \mapsto (\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{t}}, \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\underbrace{100 - t^2}}}) \in \mathbb{R}^2$$

$$x(t) = \varphi_1(t) = t, \qquad x = t$$

$$y(t) = \varphi_2(t) = 100 - t^2, \quad y = 100 - t^2$$

$$\varphi: \left[\begin{array}{l} x = t \\ y = 100 - t^2 \end{array}\right.$$

$t \in \mathbb{R}$ je nezávislé proměnná („čas")

x, y závislé proměnné.

---

2) Značení, způsoby zápisu:

- Funkce d proměnných: ($d \in \mathbb{N}$ … dim.)

$$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \quad \dots$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) := f(\overbrace{(x_1, x_2, \dots, x_d)}^{\in \mathbb{R}^d})$$

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ ... $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d)$

$$\varphi(t) = \underbrace{(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_d(t))}_{\in \mathbb{R}^d}$$

$\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$.

Vlastně φ je uspořádaná d-tice úplně prachsprostých fcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

<u>např.</u> $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

splňuje rovnici $x^2 + y^2 = 1$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

<u>BTW:</u> $\varphi(t) = (\underbrace{\cos t}_{x(t)}, \underbrace{\sin t}_{y(t)}, \underbrace{0}_{z(t)})$

$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ šroubovice

$\psi(t) = (t \cos t, t \sin t)$ spirála v $\mathbb{R}^2$

$t > 0$

- $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ $d, k \in \mathbb{N}$

(obecná varianta ... zahrnuje všechny možnosti)

$F = (F_1, F_2, \dots, F_k)$ $\mathbb{R}$

$$F(x_1, \dots, x_d) = \underbrace{(F_1(x_1, \dots, x_d), F_2(x_1, \dots, x_d), \dots, F_k(x_1, \dots, x_d))}_{\in \mathbb{R}^k}$$

<u>Snadné:</u> Chápat to po složkách.

Pro $k > 1$ hovoříme o zobrazení ne o fci.

3) Stand. značení:

- $f, g, h \dots \quad : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ resp. $G \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
- $\varphi, \psi, \eta \dots \quad : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ resp. $I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$
- $F, G, H \dots \quad : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k \qquad G \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$

- $\mathbb{R}^d = \{(x_1, \dots, x_d) : x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}\}$

  d-rozměrný eukleidovský prostor

  (někdy $\mathbb{R}^d = E^d = E_d$)
- Zde též $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$
- Ztotožňujeme $\mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$:

  $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) = ((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_l))$
- píšeme $x = (x_1 \dots, x_k)$ apod.

  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$

4) Def. obor vs. graf vs obor hodnot

$\mathbb{D}_f$: $\quad f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ resp.

$f : G \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^d$

$\mathbb{G}_f$: $\quad \mathbb{G}_f = \text{graf } f =$

$$= \{ (\underset{\mathbb{R}^d}{\underset{\cap}{x}}, \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{f(x)}}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{d+1} : x \in \mathbb{D}_f \}$$

$$= \{ (x, f(x)) : x \in \mathbb{D}_f \}$$

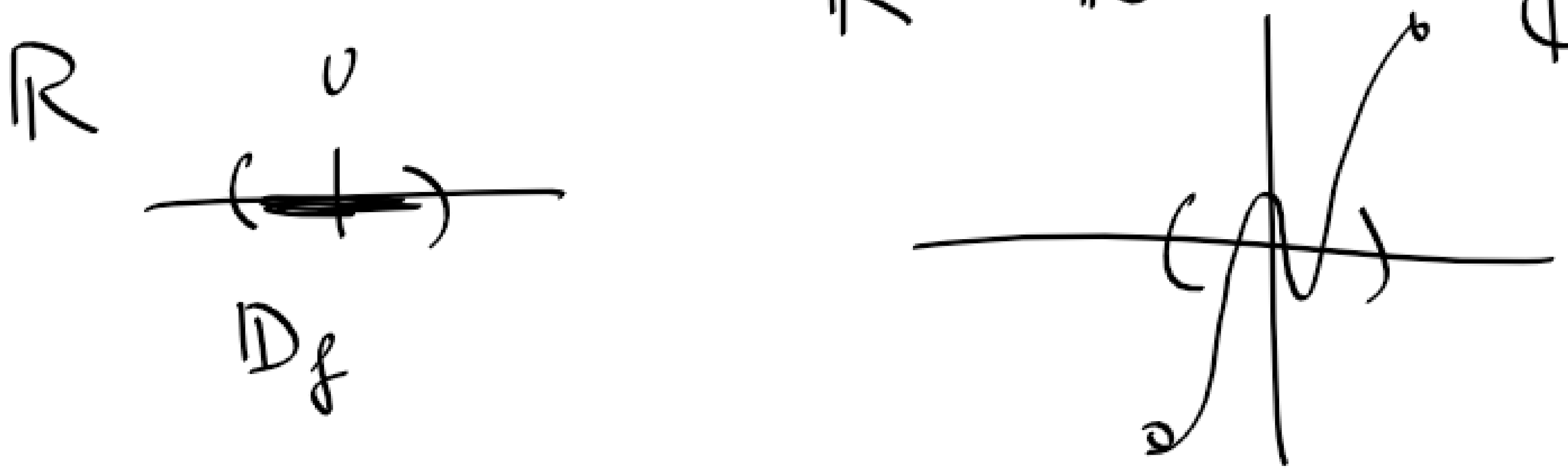
Tedy $\mathbb{G}_f \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$

$\mathbb{H}_f$: $\quad \subseteq \mathbb{R} \quad \Big| \quad \mathbb{G}_f \subseteq \mathbb{D}_f \times \mathbb{H}_f \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{d+1}$

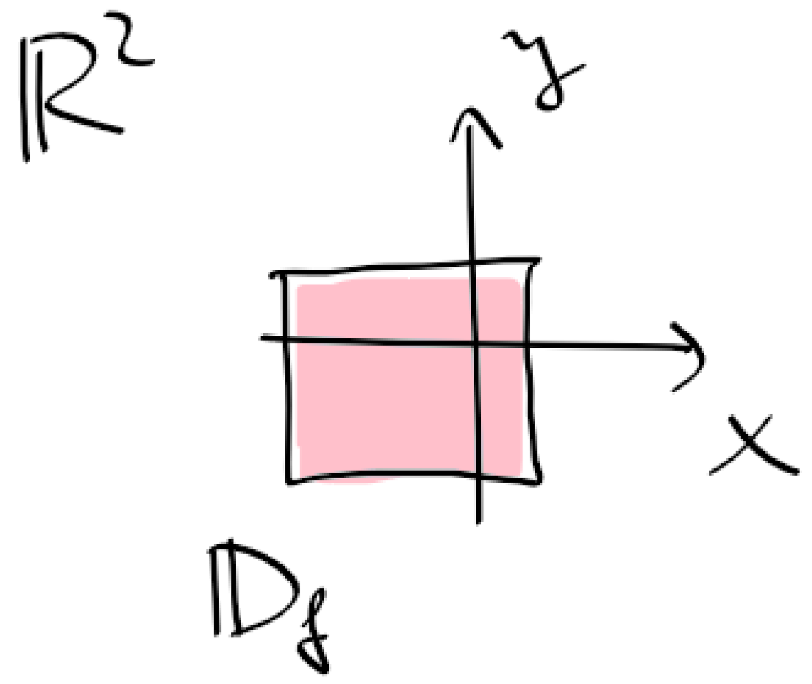
Speciálně pro $d=1$ & $d=2$:

$d=1$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

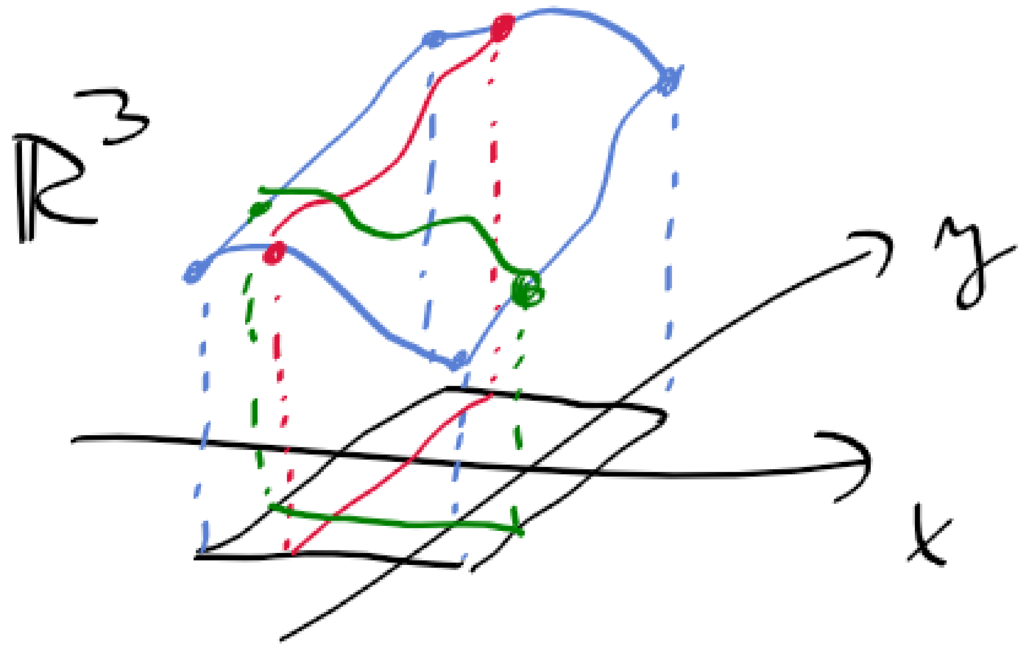
$\mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^2$ $\qquad G_f \subseteq \mathbb{R}^2$



$d=2$: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad G_f \subseteq \mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^3$



$d=3$: obtížně představitelné

$f(x,y) = R^2$ ... poloměr R

5) Různé způsoby vyjádření křivek

- parametrické : d-tice funkcí (času) (zobrazení) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$
- implicitní : křivka je dána rovnicí :

  $f(x_1, \dots, x_d) = 0$ $\qquad d=2$ .. křivk

  $\{ x \in \mathbb{R}^d : f(x) = 0 \}$ ... množina b. splňujících rovni

  „vrstevnice funkce f"
- explicitní : křivka jako graf fce

Kružnice	$f(x,y)$	kružnice je vrstevnice f ve výšce 1
$x = \cos t$	$x^2+y^2=1$	$y(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$
$y = \sin t$	$k = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :$	graf funkce
$t \in [0, 2\pi)$	$x^2+y^2=1 \}$	(po částech)

Připomeňme přímkou (SŠ):

- přímka param: $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$

$$p(t) = a + t\vec{v}, \quad a, \vec{v} \in \mathbb{R}^d$$

$d=3$: $a = (A, B, C)$, $v = (v_x, v_y, v_z)$

$$p: \begin{cases} x = A + t \cdot v_x \\ y = B + t \cdot v_y \\ z = C + t \cdot v_z \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (A, B, C) + t \cdot (v_x, v_y, v_z).$$

- Implicitní: $d=2$: $\boxed{ax + by + c = 0}$ $= 1$

Explicitní: $y(x) = \dfrac{-ax - c}{b}$

$f(x,y) = ax + by + c$ $\quad p = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$

- Implicitní $d=3$ průnik dvou rovin

2 rovnice
$$ax + by + cz + d = 0$$
$$ex + fy + gz + h = 0$$

[Parametrické / ~~Explicitní~~]: řešení soustavy 2 lin rovnic pro 3 neznámé (x, y, z).

Další křivky: param. vyjádření hyperboly

$$x = \operatorname{ch} t$$
$$y = \operatorname{sh} t$$

$$\underbrace{x^2 - y^2}_{f(x,y)} = 1$$

hyperbola je vrstevnice -1 fce f

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\operatorname{ch}^2 t = \operatorname{sh}^2 t + 1$$
$$x^2 = y^2 + 1$$

$$\operatorname{ch} t = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\operatorname{sh} t = \sinh t = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

6) Skládání fcí více proměnných:

$F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l \qquad G: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

• $F \circ G \; : \; \mathbb{R}^m \xrightarrow{G} \mathbb{R}^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{musí}}}{=} \mathbb{R}^k \xrightarrow{F} \mathbb{R}^l$

Pokud $n = k$, lze složit

• $G \circ F \; : \; \mathbb{R}^k \xrightarrow{F} \mathbb{R}^l \underset{\substack{\uparrow \\ \text{musí}}}{=} \mathbb{R}^m \xrightarrow{G} \mathbb{R}^n$

pokud $l = m$, lze složit.

Speciálně: Vnitřní funkce je

$\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$

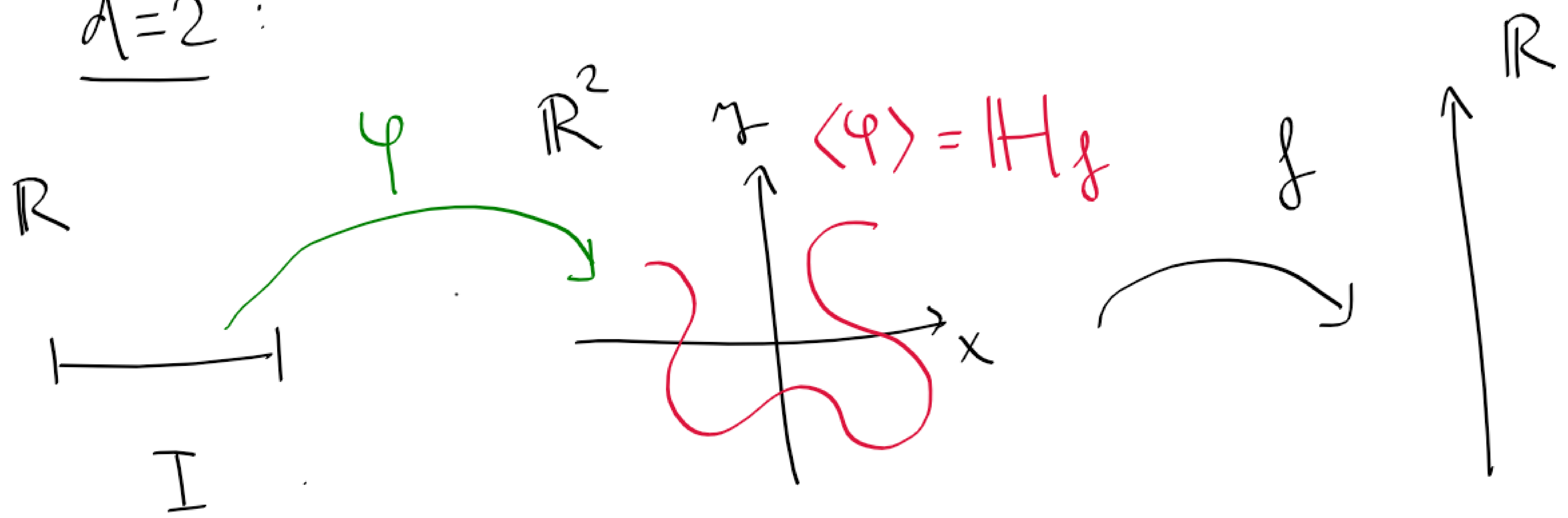
Vnější funkce

$f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$

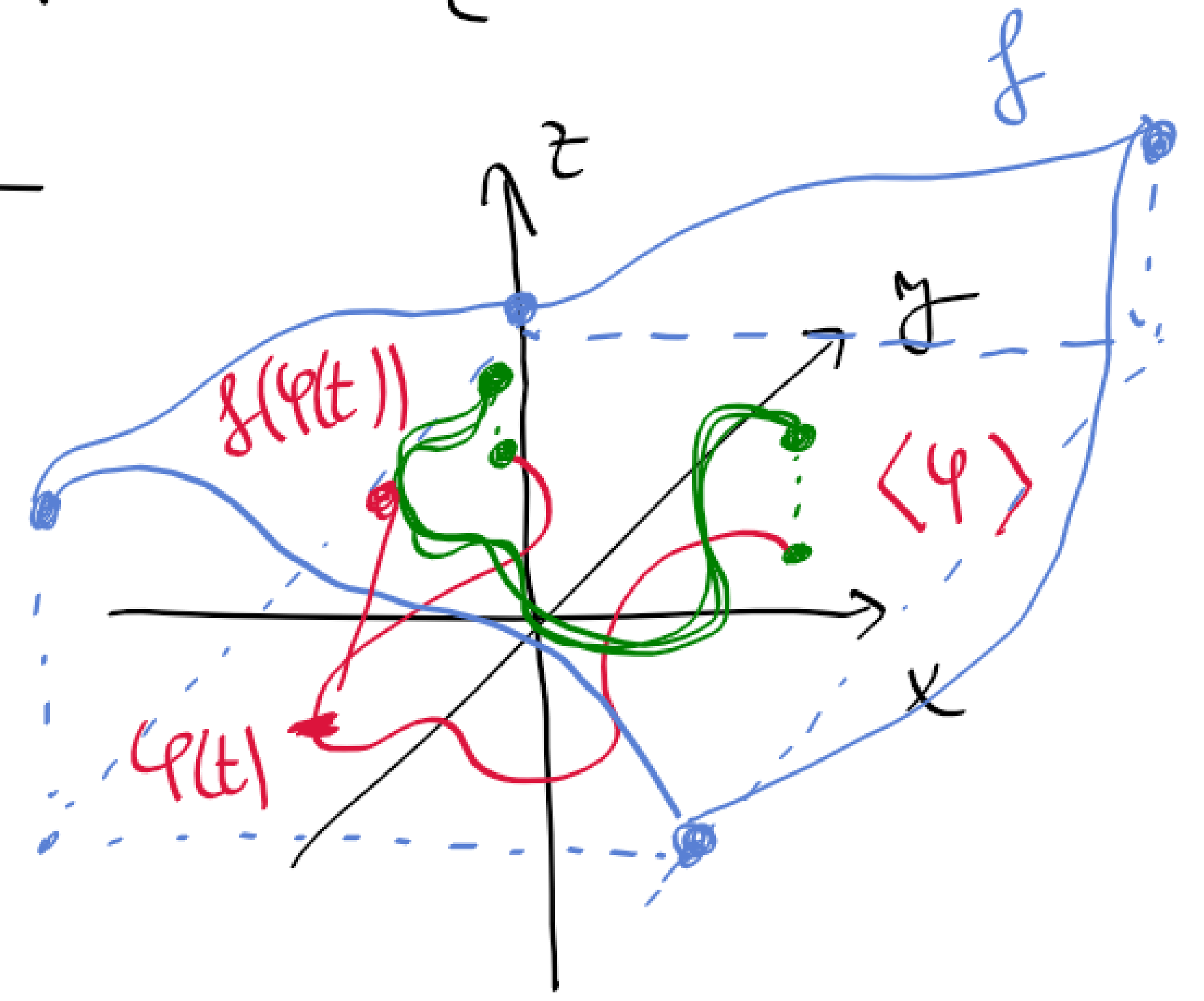
$f \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$

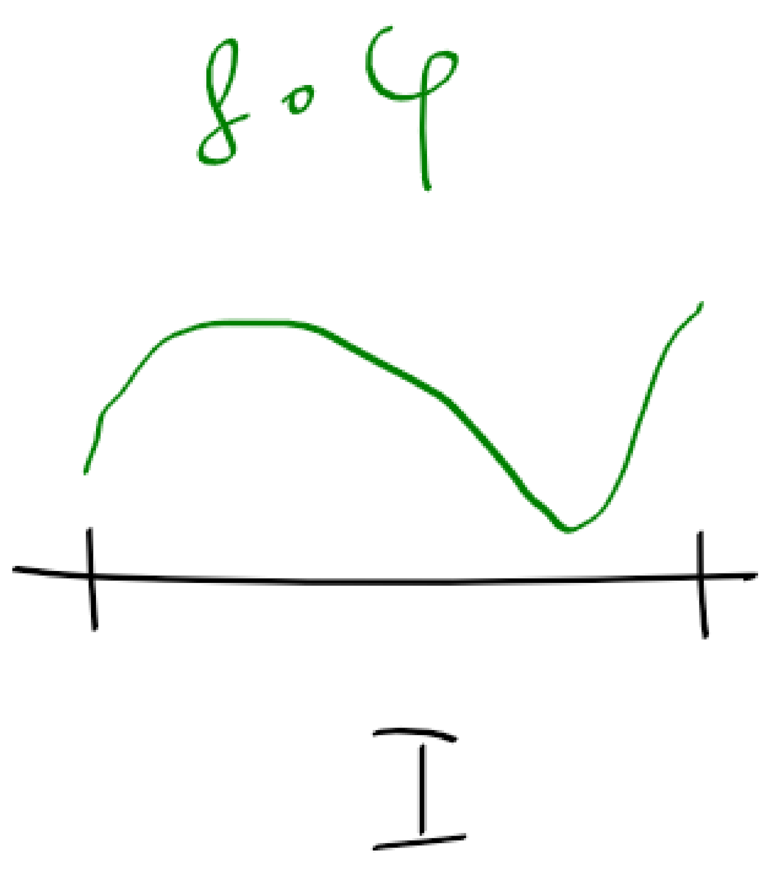
$f(\varphi(t)), \; t \in I$

$d = 2$:



$\langle \varphi \rangle = \{ \varphi(t) \in \mathbb{R}^d : t \in D_\varphi \}$





Uvažujme spec. případ $\underline{d=2}$ a φ je přím.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad \varphi(t) = a + t \cdot \vec{v}$

$a, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

Řízneme graf f rovinou určenou φ a z.

Speciálně když $\langle \varphi \rangle \parallel x$ resp. $\langle \varphi \rangle \parallel y$, $f \circ \varphi$ je parciální funkce.

$$\varphi(t) = \overbrace{(x_0, y_0)}^{a} + t \cdot (1, 0) =$$

$$= (x_0 + t, y_0) \quad \text{dosaď do } f$$

$f(\varphi(t)) = f(x_0 + t, y_0)$ ... parciální fce

$$\left(f(\varphi(t)) \right)' \Big|_{t=0} =: \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Jinými slovy obecně pro $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(f(\varphi_i(t)) \right)' \Big|_{t=0}, \quad \text{kde}$$

$$\varphi_i(t) = a + t \cdot \vec{e}_i \qquad i = 1, \dots, d.$$

$$\left(\text{kde } \vec{e}_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-tá posice}}}{1}, 0, \dots, 0) \right)$$

Příklad: Nalezněme max a minimum funkce f přes množinu M.

Chceme $\max\{f(x) : x \in M\}$, resp. min.

a) $f(x,y) = x \cdot y$

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Řešení: Parametrizujeme M:

$$\varphi : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{pak } \langle \varphi \rangle = M.$$

$$f \circ \varphi(t) = f(\varphi(t)) = f(\cos t, \sin t) =$$
$$= \cos t \cdot \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Chceme max, min $f \circ \varphi$ na $[0, 2\pi]$.

$$(f \circ \varphi(t))' = (\cos t \cdot \sin t)' = \left(\tfrac{1}{2} \sin 2t\right)' =$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 2t = \cos 2t = 0 \iff$$

$t \in [0, 2\pi)$ $\quad 2t \in [0, 4\pi]$

$$2t \in \left\{\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{2}, \tfrac{7\pi}{2}\right\}, \quad t \in \left\{\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{5\pi}{4}, \tfrac{7\pi}{4}\right\}$$

Další P.B. jsou krajní body int., tj. $0, 2\pi$

$$f \circ \varphi(t)\Big|_{t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}} = ?$$

- $f(\varphi(\frac{\pi}{4})) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$
- $f(\varphi(\frac{3\pi}{4})) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}$
- $f(\varphi(\frac{5\pi}{4})) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$
- $f(\varphi(\frac{7\pi}{4})) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}$
- $f(\varphi(0)) = f(\varphi(2\pi)) = f(1, 0) = 1 \cdot 0 = 0$

MAX $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

MIN $\pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Alternativně:

extrémy $f(x,y) = xy$ přes $M = \{ \underbrace{x^2 + y^2}_{h(x,y)} = 1 \}$

Řešení 2: Explicitní vyjádření M:

$y = \pm\sqrt{1-x^2}$

Parametrizace

$$\left.\begin{aligned} \varphi_+(t) &= (t, \sqrt{1-t^2}) \\ \varphi_-(t) &= (t, -\sqrt{1-t^2}) \end{aligned}\right\} t \in [-1,1]$$

Hledat extrémy funkcí

$$g_+(t) = f(\varphi_+(t)) = f(t, \sqrt{1-t^2}) = t \cdot \sqrt{1-t^2}$$

$$g_-(t) = \quad \ldots \quad = -t \cdot \sqrt{1-t^2}$$

$$t \in [-1,1]$$

Definice 1: (limita funkce více proměnných)

• eukleidovská norma a vzdálenost

$x \in \mathbb{R}^d$ .. $\|x\| = \|x\|_e = \|x\|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_d^2\right)^{\frac{1}{2}}$

(podle Pyth. věty jde o „vzdálenost" bodu $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ od počátku.)

$\rho_e(x,y) = \rho_2(x,y) = \|x-y\|$.

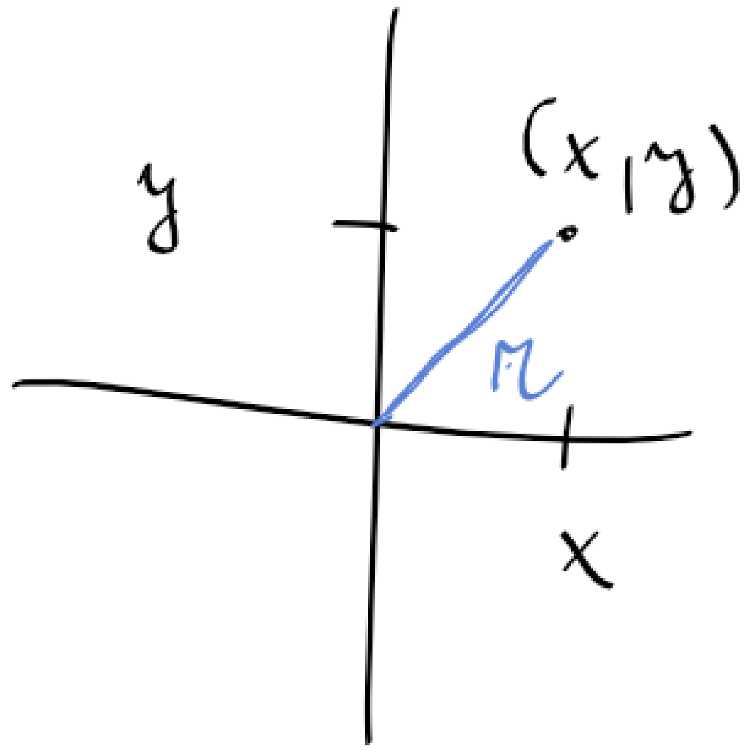
vzdálenost (eukl.) bodů $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Pozn.: 1) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ $\quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^d$

Těžší $\rightarrow$ 2) $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$

3) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$, $\rho \ge 0$

$\mathbb{R}^2$



$r = \sqrt{x^2+y^2}$.

$\mathbb{R}^3$ ... $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ... Cv.

(dvojím použitím P.V.)

• $B(a,\varepsilon) = \{x\in\mathbb{R}^d : \rho_e(a,x) < \varepsilon\}$

(Též $B_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) = U(a,\varepsilon) = B(a,\varepsilon)$)

• $P(a,\varepsilon) = B(a,\varepsilon)\setminus\{a\}$

okolí (B), resp. prstencové okolí (P)

• v terminologii MP $B(a,\varepsilon)$ ... koule.

Řekneme, že číslo $A\in\mathbb{R}^k$ je limitou funkce $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^k$ v bodě $a\in\mathbb{R}^d$, jestliže:

$$\forall \varepsilon>0\ \overset{\delta_A}{\exists\delta>0}\ \forall x\in P(a,\delta): f(x)\in B(A,\varepsilon)$$

Základní věty o limitách projdou beze změny. Například:

• Jednoznačnost limity:

nechť A je limita f v a

B — " —

Kdyby $A\neq B$, pak $\rho_e(A,B)>0$

$\varepsilon := \frac{1}{2}\rho_e(A,B)>0$. Podle def.

$\exists\delta_A>0$, $\exists\delta_B>0$ tak, že

$$\forall x \in P(a,\delta_A): \quad f(x) \in B(A,\varepsilon) \qquad (1)$$

$$\forall x \in P(a,\delta_B): \quad f(x) \in B(B,\varepsilon). \qquad (2)$$

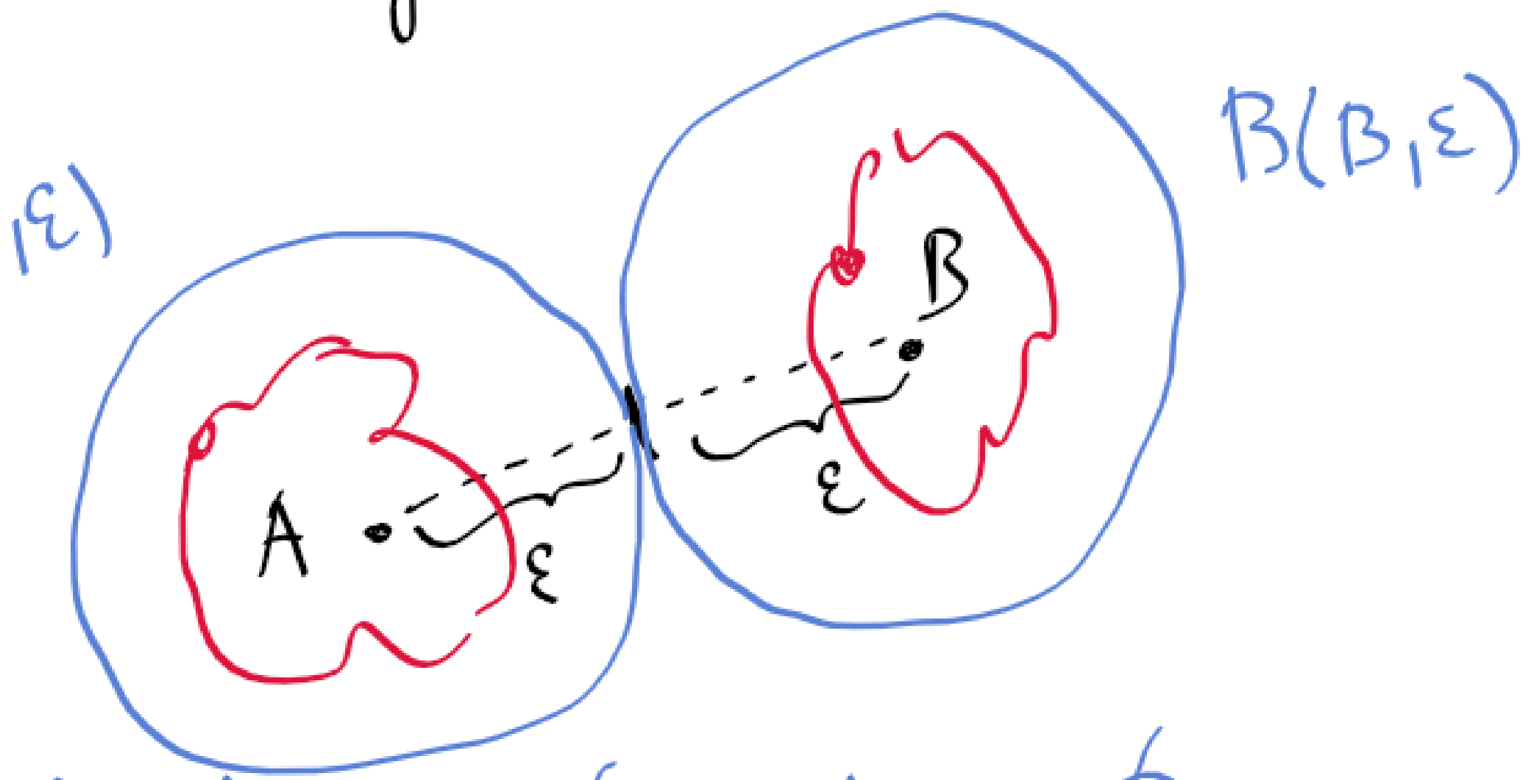
Položme $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\} > 0$.

Zvolme $x \in P(a,\delta)$. Pak

$$x \in P(a,\delta_A) \overset{(1)}{\Longrightarrow} f(x) \in B(A,\varepsilon)$$

$$x \in P(a,\delta_B) \overset{(2)}{\Longrightarrow} f(x) \in B(B,\varepsilon)$$

Tedy $f(x) \in B(A,\varepsilon) \cap B(B,\varepsilon)$, což je spor, což vysvětlím:



Je vidět $B(A,\varepsilon) \cap B(B,\varepsilon) = \emptyset$.

$f(x) \in B(A,\varepsilon) \cap B(B,\varepsilon)$. Tedy

$$\rho(f(x),A) < \varepsilon \qquad \rho(f(x),B) < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(A,B) \overset{\Delta\text{-ner}}{\leq} \frac{1}{2}\big(\rho(A,f(x)) + \rho(f(x),B)\big)$$

$$< \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon) = \varepsilon. \quad ↯ \qquad \boxtimes$$

Definice 2: (Spojitost funkce vzhledem k mn.)

nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$.

nechť $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in M$.

Řekneme, že F je v bodě a spojité vzhledem k M, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x \in B(a,\delta) \cap M : F(x) \in B(F(a),\varepsilon).$$

Resp.:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x \in \mathbb{R}^d \cap M$$

$$\rho(x,a)<\delta \Rightarrow \rho(F(x),F(a))<\varepsilon$$

$$\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|F(x)-F(a)\|<\varepsilon$$

Příklad: Spojitost funkce $f(x)=\sqrt{x}$ v bodě 0 zprava je totéž, jako její spojitost v bodě vzhledem k $[0,\infty)$

Obecně: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je v bodě a zprava spoj. $\Longleftrightarrow$ tr.

f je v a spojitá vzhl. k $[a,\infty)$.

(Analogicky zleva)

$f: G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$

Obr.: